Jó gyakorlatok
MATH_104BCD_H

A szerző neve és intézménye: **Zoltán Fehér,** J. Selye University, Komárno, Slovakia

A probléma / gyakorlat leírása: **Geometriai valószínűség**

A feladat a valószínűség témakörbe tartozik, részben új feladat, részben a B510 PUSE módosítása. Felhasznált készlet: háromszög, négyzet.

Feladat leírása: rakd ki az alakzatot (céltáblát) a megadott alapformákból és számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlen lövéssel az előre megadott színt találjuk el.

Két esetre oldjuk:

I. a készletből kirakunk egy alakzatot (legyen zárt), ez lesz a céltábla. A tanulóknak meg kell határozni a céltáblán egy (vagy több) szín eltalálásának a valószínűségét.
II. Megadjuk a színek (lehet csak 1 vagy összes) valószínűségét és a tanulóknak kell elkészíteni a céltáblát (alakzatot), amelyen az adott szín(ek) valószínűsége megfelel a megadott értékeknek.

Megjegyzések:

a) A PUSE B510 feladat a II. esetet oldja, amikor a színek területei egyenlők, vagyis a valószínűségük aránya 1:1:1:1.

b) A céltábla kirakásához egyaránt alkalmas a háromszög és a négyzet készlet, mivel ezekből eltérő alakzatokat készíthetünk. Viszont a valószínűséget tekintve ugyanazt az eredmény kapjuk, mivel a háromszög és négyzet esetén is a kis, közepes, nagy forma területének aránya az alapelem területéhez viszonyítva megegyezik (a négyzetnél a lyukat nem vesszük figyelembe).

I. eset:

A készlet elemeiből kirakunk egy zárt alakzatot, ez lesz a céltábla. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a céltáblán egy adott színt véletlenszerűen eltalálunk egy lövéssel?

a) Céltábla készítése háromszög készletből:

- szabályos háromszög alakzatot 1, 4, 9, 16 darab felhasználásával készíthetünk,
- a céltábla lehet szabályos hatszög alakzat 6 vagy 24 elemből,
- különböző méretű rombuszok 2, 8, 18 elemből
- trapéz, paralelogramma alakzatok,
- egyéb tetszőleges alakzatok, szimmetrikus vagy nem, pl. csillag 12 elemből.

Céltábla készítése négyzet készletből:

- négyzet alakú céltáblát 1, 4, 9, 16 darab felhasználásával készíthetünk,
- különböző méretű téglalap alakú céltáblák,
- szimmetrikus alakzatok, + jel vagy kereszt alakzat,
- egyéb tetszőleges alakzatok.

b) Valószínűség meghatározása:

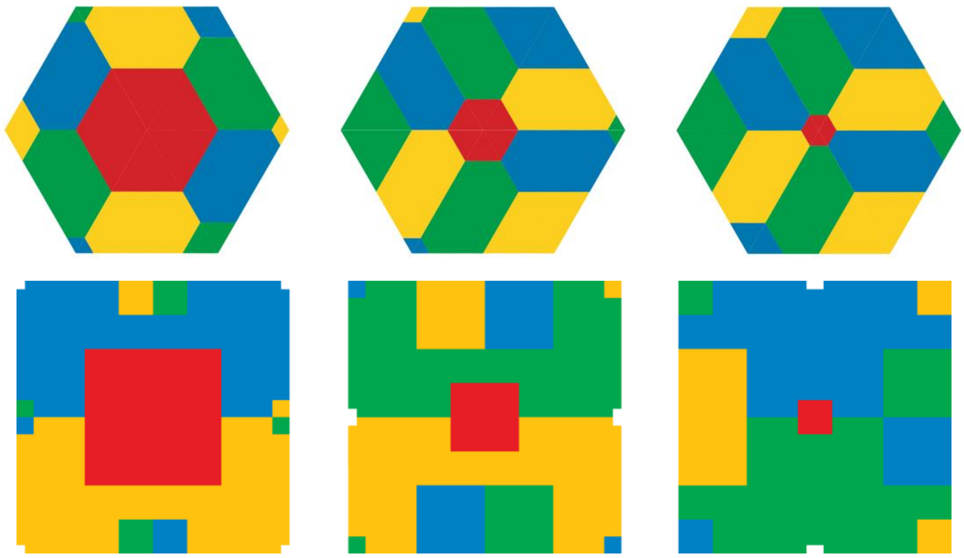
A háromszög és négyzet alapelem esetén (PUSE C 133 feladat)

- a nagy forma területe az alapelem területének 1/4 része,
- a közepes forma területe az alapelem területének 1/16 része,
- a pici forma területe az alapelem területének 1/64 része,
- a legnagyobb forma területe az alapelem területének 43/64 része.

A számításhoz legyen az alapelem legkisebb mezőjének területe 1, akkor a pici, közepes, nagy mezők területe nagyság szerinti sorrendben 4, 16, 43, az alapelem területe pedig 64. Tehát, ha az alakzathoz (céltáblához) *n* alapelemet használtunk fel, a teljes terület 64*n*.

Annak a valószínűsége, hogy a céltáblán egy adott színt egy véletlen lövéssel eltalálunk egyenlő az adott színű alakzat területének és a teljes terület hányadosával.

- Határozzuk meg a céltáblán egy kiválasztott szín (pl. a céltábla közepe) eltalálásának valószínűségét!

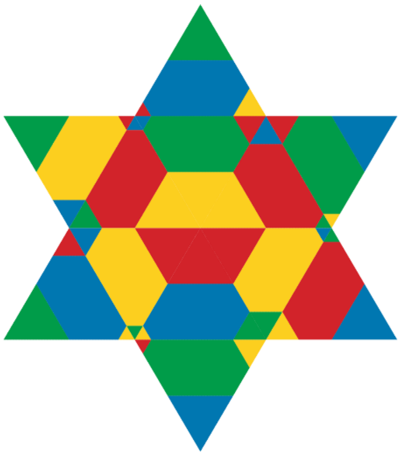


- Mennyi a valószínűsége, hogy eltaláljuk a céltábla közepét (piros szín)?
- Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem találjuk el a kiválasztott színt?

A teljes alakzat (céltábla) területe 64*n*, ahol *n* a felhasznált alapelemek száma. A céltábla közepének (piros mező) területe rendre 6·16, 6·4, 6·1 a hatszög esetén és 4·16, 4·4, 4·1 a négyzet esetén. A középső piros rész és a teljes terület aránya adja meg a találat valószínűségét, ami sorrendben 1/4, 1/16, 1/64.

Más gondolatmenetet használva, mivel tudjuk, hogy az alapelemen a nagy, közepes, pici forma területének aránya az alapelemhez viszonyítva 1/4, 1/16 ill. 1/64, ez az arány megmarad a teljes alakzatban is, hiszen ahányszor szerepel az alapelem, annyiszor szerepel a középen lévő forma is.

- Határozzuk meg a céltáblán mind a négy szín valószínűségét!



A valószínűség kiszámításához készítsünk táblázatot, melyben a céltábla alapján felírjuk és összegezzük az egyes színes mezők területének nagyságát:

	alapszín	nagy	közepes	pici	összesen
területegység	43	16	4	1	64
1. szín P	?	?	?	?	?
2. szín S					
3. szín K					
4. szín Z					

II. eset:

Megadjuk a céltáblán lévő színek (lehet csak 1 vagy az összes) eltalálásának valószínűségét és a tanulóknak kell elkészíteni a céltáblát (alakzatot), amelyen az adott szín(ek) valószínűsége megfelel a megadott értékeknek.

- Csak 1 szín valószínűségét adjuk meg, a többi lehet tetszőleges. Milyen valószínűségek esetén készíthető céltábla?
- A színek eltalálásának valószínűségét a színes mezők területének 1:1:1:1 arányaként adjuk meg, amelynek megfelelően kell a céltáblát elkészíteni. Hány alapelem felhasználásával lehet és melyek azok a darabszámok, amelyekre nem lehet elkészíteni a megfelelő céltáblát. (PUSE B510 feladat).
- A színek eltalálásának valószínűségét általánosan a színes mezők területének *a* : *b* : *c* : *d* arányaként adjuk meg, amelynek megfelelően kell a céltáblát elkészíteni. Milyen valószínűségek esetén készíthető céltábla?

A valószínűség kiszámításához itt is készíthetünk táblázatot, melyben felírjuk és összegezzük számításainkat.

Az adott számú elem elrendezése az elemek színe és azok mérete szerint legyen egy **A** (4×4-es) mátrix. Az alapelemen a színes mezők értéke legyen egy ***v*** (43, 16, 4, 1) vektor, a megadott arány pedig ***a*** vektor. Akkor az

$$A \cdot \vec{v} = \vec{a}$$

egyenletre keresünk megoldást úgy, hogy az **A** mátrix soraiban és oszlopaiban az összeg mindig az alapelemek számát adja meg.

Például az $a : b : c : d = 1 : 1 : 1 : 1$ arány esetén tudjuk, hogy legkevesebb $n = 3$ alapelem felhasználásával megoldható. Az $n = 3$ esetén egy lehetséges elrendezést a következő egyenlettel adhatunk meg:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 48 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Miért jó ez a gyakorlat*: Fejleszti a problémamegoldást, logikus gondolkodást.
- *Milyen szinten alkalmazható:* a feladat nehézségi foka szerint lehet felső tagozat, középiskola, matematika szakos tanárképzés
- *Iskolai tantárgy(ak)*: Matematika, valószínűségszámítás