Jó gyakorlatok
MATH_110CD_H

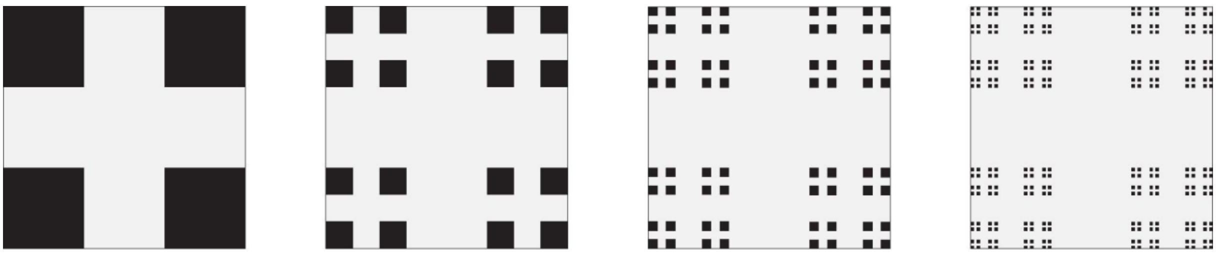
A szerző neve és intézménye: **János Szász Saxon,** Széchenyi Academy / Poly-Universe Ltd, Szokolya, Hungary

A probléma / gyakorlat leírása: **Cantor & Saxon**

A lenti (2. ábra) Saxon polidimenzionális alkotás függetlenül jött létre a Cantor halmaztól. Ebben a gyakorlatban megvizsgáljuk az alkotást, és geometriai és matematikai összefüggéseket keresünk a klasszikus fraktálokkal.

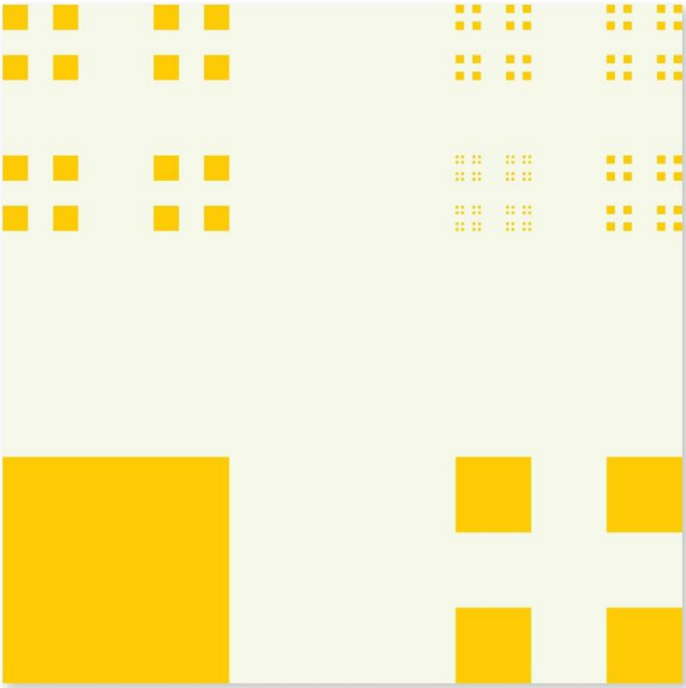
A kép jól látható módon, a négyzet átlói felezésének lehetséges permutációjából adódik:

Haladási irányunk most a befelé (enteriőr = elvesz a területéből, űrt hagy) építkezés, vagyis inkább síkfogyatkozás, mert a forma lebontása a cél. Ugyancsak a sarokpontokat jelöljük ki kapcsolódási pontoknak, melyek mindegyikében meghagyjuk az előző lépték oldalainak 1:3 arányából nyert kisebb fekete négyzeteket, majd ismételjük meg az eljárást néhányszor. Látható hogy az első négyzetben négy kisebb $T_1 = 4/9$ elemünk marad, azok mindegyikében ugyancsak négy kisebb négyzet marad, és így folytatódik a végtelenségig. A kiinduló négyzet területét ($T_0 = 1$) közben $T_3 = 1 - (5/9) - (5/9)\times(4/9) - (5/9)\times[(4/9)\times(4/9)] = 0.087792$ szeresére csökkentettük három lépésben, miközben a megmaradó négyzetek darabszáma $D_3 = 64$ lett. A további darabszámot a $D_n = 4^n$ hatvánnyal kapjuk, és $n \rightarrow \infty$ esetén a maradék forma, végtelenül kicsi szemcsézettségű porfelhő lesz, a szemünk előtt rejtve marad. Az ádáz küzdelemben a fekete négyzetünk végleg elveszíti területének utolsó szigetecskéit és kifehéredik (1. ábra).



1. ábra: SAXON alkotásának didaktikus ábrája

Saxon a teljes átszellemülést, az abszolút tiszta állapotot a festészetben csak olyan elemekből építkezve tudta modellezni, melyek már önmagukban is a „tiszta érzet” szupremáciáját hordozzák. Így a négyzet és az azt négy részre osztó kereszt, mint alapvető szuprematista elemek (Kazimír Malevics szuprematizmus) szolgáltak kiindulásként. A négyzet jelen esetben a létezést szimbolizáló sárga színt, míg a vele ellentétes kereszt az üresség/tisztaság érzetét keltő fehér tónust kapta, annál is inkább, mert számára a sárga szín a fehér viszonylatában égetőbb kontraszttal adja vissza a lét-nemlét, a valami és a semmi érzetét, mint a fekete és a fehér. A képépítkezés, vagyis a sárga négyzet lebontása során eljuthatunk a teljes kiüresedés érzetéhez, pontosabban egy polidimenzionális háló megalkotásához. A mikro- és makro világokat összekötő háló, amely mint hiperszűrő a végtelen dimenzióstruktúrákban kifeszülve a létezés tökéletlen objektumait (sárga négyzetecskéit) “testéből” permanensen kidobni igyekszik (2. ábra).



2. ábra: SAXON, Immateriális átjáró 1997., olaj fatábla 150x150 cm

A hasonló módszerekkel kapott hasonló tulajdonságú halmazok a Cantor-halmazok. Az elhagyott intervallumok helye, hossza és száma változó.

Legyen adva a valós számok intervalluma. Az első lépésben eltávolítunk belőle véges sok diszjunkt nyílt intervallumot, de legalább egyet, és marad legalább 2, de véges sok zárt intervallum.

A második lépésben ehhez hasonlóan megint véges sok nyílt intervallumot távolítunk el minden kis megmaradt intervallumból.

Ezt iterálva végtelen sok lépés után azok a pontok maradnak, amelyek nem tartoztak bele egy eltávolított intervallumba sem.

3. ábra: Cantor klasszikus fraktálábrája / https://hu.wikipedia.org/wiki/Cantor-halmaz

Megmutatható, hogy az így kapott Cantor-halmazok homeomorfak, és kontinuum számosságúak, vagyis ugyanaz a számosságuk, mint a valós számoké. Az elhagyott és a megmaradt intervallumok arányának megválasztásával minden adott [0,1]-béli számhoz található Cantor-halmaz, aminek ez a dimenziója.

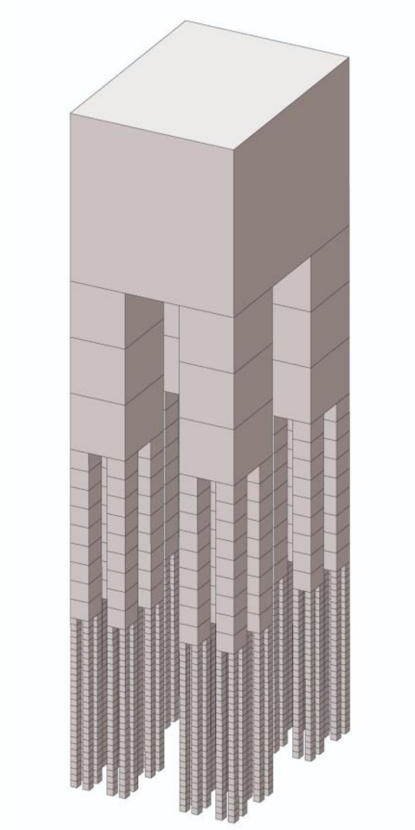
A Smith–Volterra–Cantor-halmaz akárcsak a fenti Saxon alkotás úgy készül, hogy az n-edik lépésben az egyes szakaszok középső harmada helyett a középső $1/(2^n+2)$ arányú részét távolítjuk el (tehát egy $1/2^{2n}$ hosszú részt). Az elhagyott intervallumok hossza összesen

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (1/2^{2n+2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2}$$

így a Smith–Volterra–Cantor-halmaz hossza 1/2. A pozitív Lebesgue-mérték ellenére ez a halmaz sehol sem sűrű tulajdonságú.

A Cantor-por a Cantor-halmaz magasabb dimenziós változata. Ezek a porok a Cantor-halmaz véges Descartes-hatványai. Ahogy a Cantor-halmaznak, a Cantor-poroknak is nulla a mértéke.

- *Miért jó ez a gyakorlat:* Interdiszciplináris megközelítés. A képzőművészet és a matematika kapcsolata. A művészettörténet és a matematikatörténet közötti kapcsolatok.
- *Milyen szinten alkalmazható*: Középiskola (emelt szintű képzés), matematikatanár képzés
- *Iskolai tantárgy(ak):* Művészet és matematika
- *Megjegyzések:* Lásd még Saxon's Footless Chair (1998)



4. ábra: SAXON, Lábatlan szék (1998) / http://www.saxon-szasz.hu/writings/by-saxon/labatlan-szek/